## 5 関数とグラフ

**33**

**(1)**

$f(x)=(x-a)^2-a^2+a+2\ (0\leq x\leq 3)$ より，

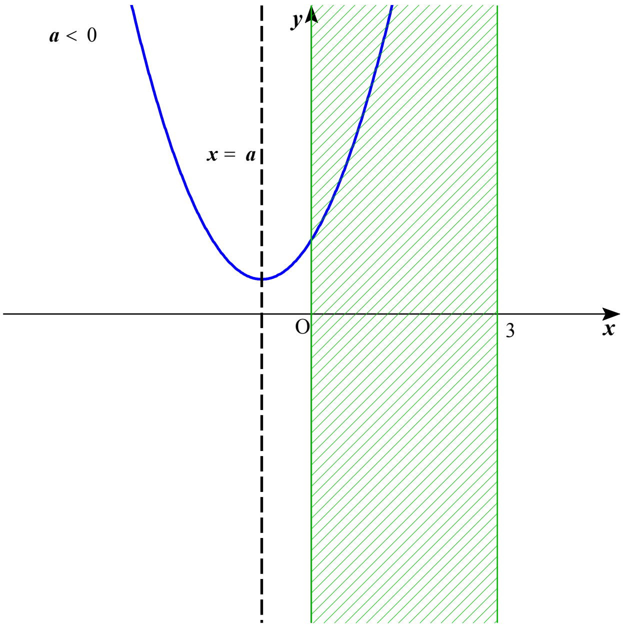
軸 $x=a$ について，

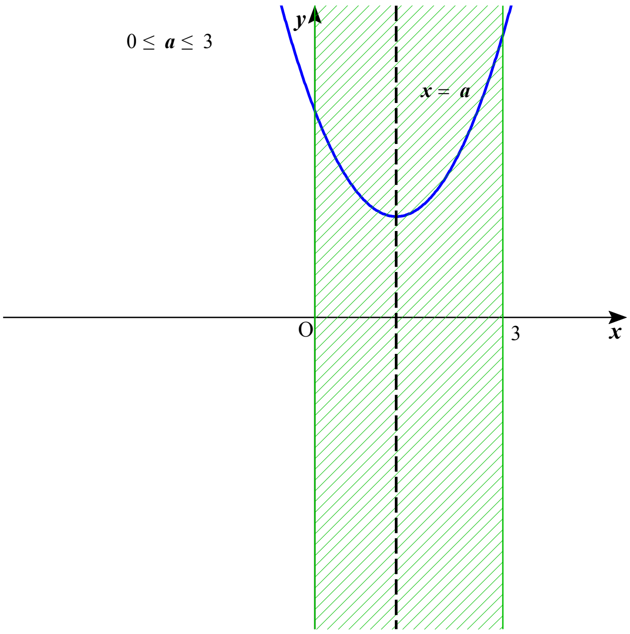
$a<0$ のとき　$m=f(0)=a+2$

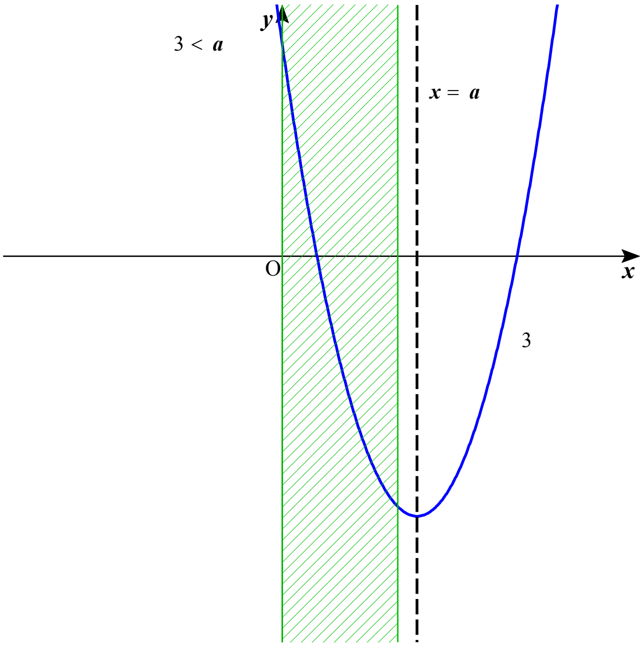
$0\leq a\leq 3$ のとき　$m=f(a)=-a^2+a+2$

$3<a$ のとき　$m=f(3)=-5a+11$

参考図



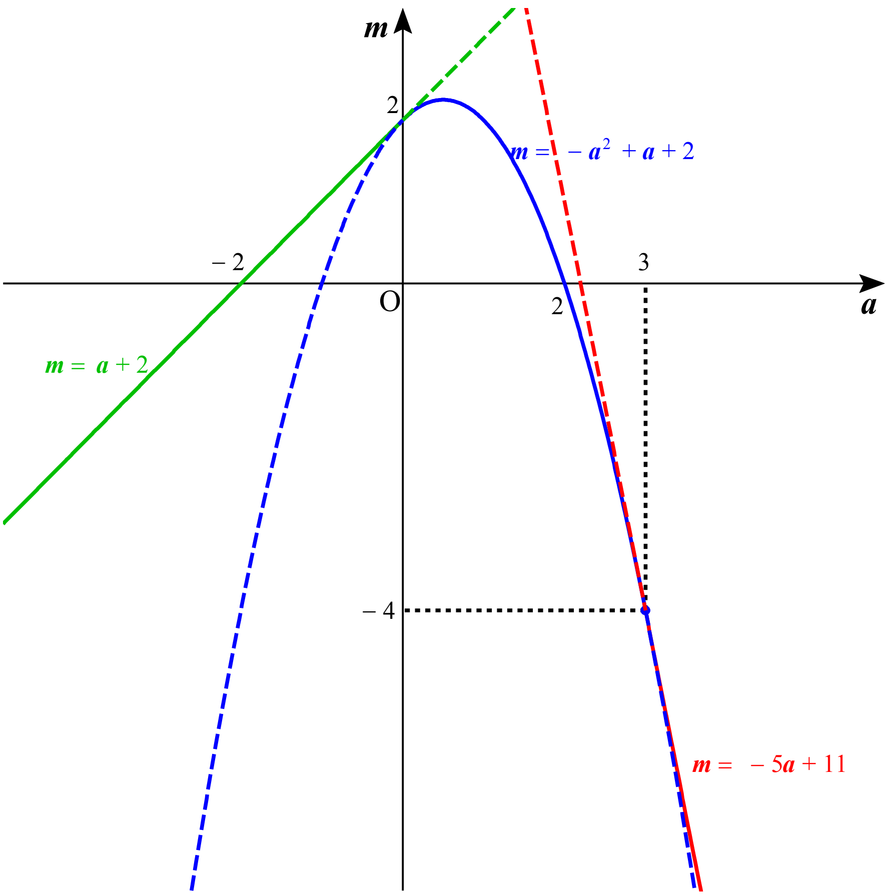






**(2)**

(1)をグラフで表すと下図のようになる。

よって，$-2<a<2$



**34**

**(1)**

$f(x)=(x-2)^2+a-4\ (a \le x \le a+1)$ より，

軸 $x=2$ について

$a+1<2$ すなわち $a<1$ のとき：$g(a)=f(a+1)=a^2-a-3$

$a \le 2 \le a+1$ すなわち $1 \le a \le 2$ のとき：$g(a)=f(2)=a-4$

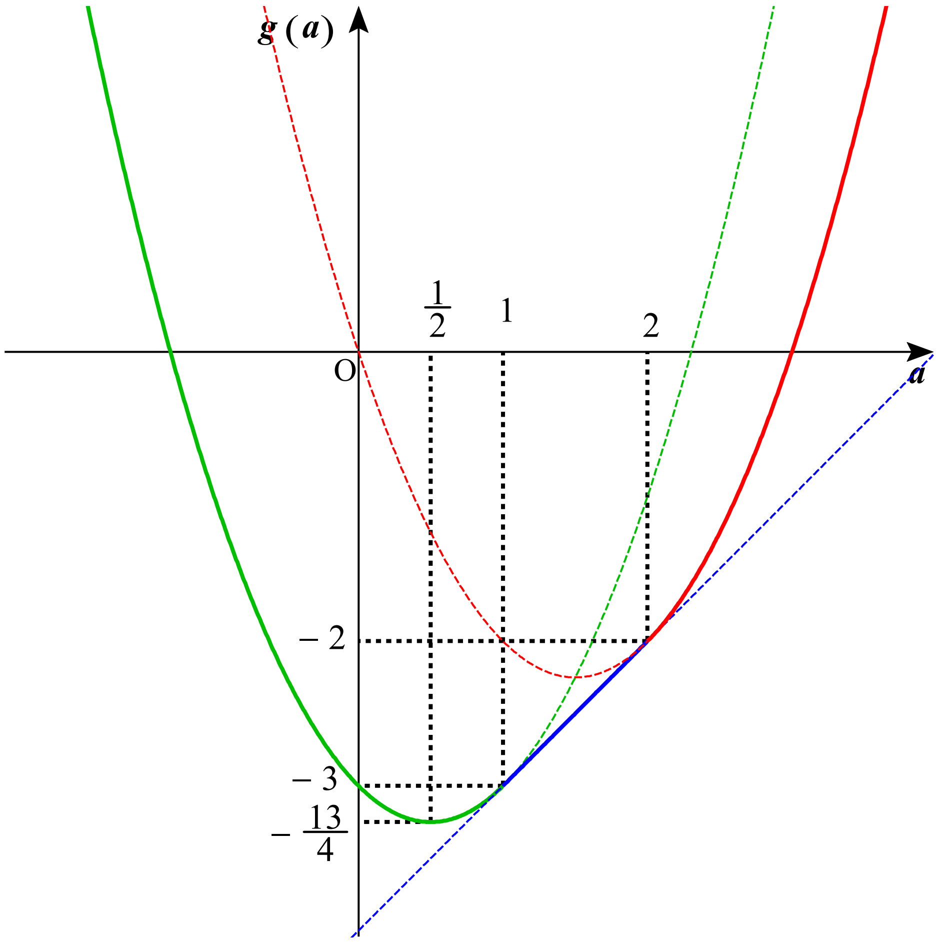
$2<a$ のとき：$g(a)=f(a)=a^2-3a$

**(2)**

(1)より，$g(a)=\begin{cases} \left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4} & (a<1) \\ a-4 & (1 \le a \le 2) \\ \left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4} & (2<a) \end{cases}$

よってグラフは下図のようになる。

ゆえに，$g(a)$ は $a=\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{13}{4}$ をとる。



**35**

$$f(x)=\{x(x-4)\}\{(x-1)(x-3)\}$$
$$=(x^2-4x)\{(x^2-4x)+3\}$$

ここで，$t=x^2-4x$ とおくと，

$t=(x-2)^2-4$，$0\leq x\leq 4$ より，$-4\leq t\leq 0$

また，

$$(x^2-4x)\{(x^2-4x)+3\}=t(t+3)$$
$$=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

より，$g(t)=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\quad(-4\leq t\leq 0)$ とおくと，

$g(t)$ は $t=-4$ で最大値 4，$t=-\frac{3}{2}$ で最小値 $-\frac{9}{4}$ をとる。

$t=-4$ のとき

$-4=x^2-4x$ より，$x^2-4x+4=0\quad\therefore x=2$

$t=-\frac{3}{2}$ のとき

$-\frac{3}{2}=x^2-4x$ より，$2x^2-8x+3=0\quad\therefore x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$

よって，$f(x)$ は $x=2$ で最大値 4，$x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$ で最小値 $-\frac{9}{4}$ をとる。

**36**

**(1)**

$$Q=x^2-8xy+17y^2+6x-30y+10$$
$$=x^2-2(4y-3)x+17y^2-30y+10$$
$$=\{x-(4y-3)\}^2-(4y-3)^2+17y^2-30y+10$$
$$=\{x-(4y-3)\}^2+y^2-6y+1$$
$$=\{x-(4y-3)\}^2+(y-3)^2-8$$
$$\geq -8$$

等号は $x=4y-3$ かつ $y=3$　すなわち $x=9$，$y=3$ のとき成立

よって，$x=9$，$y=3$ で $Q$ は最小値 $-8$ をとる。

**(2)**

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2&=(7-2y-3z)^2+y^2+z^2\\
&=5y^2+2(6z-14)y+10z^2-42z+49\\
&=5\left(y+\frac{6z-14}{5}\right)^2-\frac{(6z-14)^2}{5}+10z^2-42z+49\\
&=5\left(y+\frac{6z-14}{5}\right)^2+\frac{14}{5}\left(z^2-3z\right)+\frac{49}{5}\\
&=5\left(y+\frac{6z-14}{5}\right)^2+\frac{14}{5}\left(z-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}\\
&\geq\frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

等号成立は $y=-\dfrac{6z-14}{5}$，$z=\dfrac{3}{2}$ すなわち $y=1$，$z=\dfrac{3}{2}$ のとき

よって，$x=\dfrac{1}{2}$ $y=1$，$z=\dfrac{3}{2}$ のとき $x^2+y^2+z^2$ は最小値 $\dfrac{7}{2}$ をとる。

**37**

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\left(2x+\frac{27}{x+1}+2\right)\left(x+\frac{6}{x+1}+1\right)\\
&=\left\{2(x+1)+\frac{27}{x+1}\right\}\left\{(x+1)+\frac{6}{x+1}\right\}\\
&=2(x+1)^2+\frac{162}{(x+1)^2}+39
\end{aligned}
$$

ここで，$x+1>0$ より，$2(x+1)^2+\dfrac{162}{(x+1)^2}\geq 2\sqrt{2(x+1)^2\cdot\dfrac{162}{(x+1)^2}}=36$

等号成立は $2(x+1)^2=\dfrac{162}{(x+1)^2}$ かつ $x>0$ すなわち $x=2$ のとき

よって，$f(x)\geq 36+39=75$

ゆえに，$f(x)$ は $x=2$ で最小値 75 をとる。

**38**

**(1)**

$4x+3y=7$ より，$y=\dfrac{7-4x}{3}$ ・・・①

$y\geq 0$ より，$7-4x\geq 0$

これと $x\geq 0$ より，$0\leq x\leq\dfrac{7}{4}$ ・・・②

また，①より，

$$xy=-\frac{1}{3}\left(4x^2-7x\right)$$
$$=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{7}{8}\right)^2+\frac{49}{48}$$

これと②より，$xy$ は $x=\frac{7}{8}$ で最大値 $\frac{49}{48}$，$x=0,\ \frac{7}{4}$ で最小値 0 をとる。

**(2)**

$$x^2y^2-16x^2-9y^2-26xy=(xy)^2-(4x+3y)^2-2xy$$
$$=(xy)^2-2xy-49$$
$$=(xy-1)^2-50$$

(1)より，$0\leq xy\leq\frac{49}{48}$ だから，$xy=0$ で最大値 $-49$，$xy=1$ で最小値 $-50$ をとる。

**39**

$$\frac{x^4+4x^3+4x^2+5}{x^2+2x+2}=\frac{\left\{\left(x^2+2x\right)+2\right\}\left\{\left(x^2+2x\right)-2\right\}+9}{x^2+2x+2}$$
$$=x^2+2x-2+\frac{9}{x^2+2x+2}$$
$$=x^2+2x+2+\frac{9}{x^2+2x+2}-4$$
$$=(x+1)^2+1+\frac{9}{(x+1)^2+1}-4$$
$$\geq 2\sqrt{\left\{(x+1)^2+1\right\}\cdot\frac{9}{(x+1)^2+1}}-4\quad\left(\because (x+1)^2+1>0\right)$$
$$=2$$

等号成立は $(x+1)^2+1=\frac{9}{(x+1)^2+1}$ のとき，すなわち $(x+1)^2+1=3$ のときで，

これを解くと，$x=-1\pm\sqrt{2}$

よって，$x=-1\pm\sqrt{2}$ で最小値 2 をとる。

**40**

**(1)**

$k=\frac{x}{y}$ より，$x=ky$

これを $x^2+y^2-4y+2=0$ に代入し $y$ について整理すると，

$y$ についての 2 次方程式 $\left(k^2+1\right)y^2-4y+2=0$ となる。

この方程式は実数解をもつから，判別式を $D$ とすると，

実数解条件より，$\frac{D}{4}=4-\left(k^2+1\right)\cdot 2=-2\left(k^2-1\right)=-2(k+1)(k-1)\geq 0\quad\therefore -1\leq k\leq 1$

**(2)**

$$z=\frac{x^2+4xy+9y^2}{xy+2y^2}$$
$$=\frac{y^2\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^2+4\cdot\frac{x}{y}+9\right\}}{y^2\left(\frac{x}{y}+2\right)}$$
$$=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+4\cdot\frac{x}{y}+9}{\frac{x}{y}+2}$$
$$=\frac{k^2+4k+9}{k+2}$$

**(3)**

$$z=\frac{k^2+4k+9}{k+2}$$
$$=\frac{(k+2)^2+5}{k+2}$$
$$=k+2+\frac{5}{k+2}$$

$-1\leq k\leq 1$ より，$k+2>0$

これより，相加平均≥相乗平均が成り立つから，

$$z=k+2+\frac{5}{k+2}\geq 2\sqrt{(k+2)\cdot\frac{5}{k+2}}=2\sqrt{5}$$

等号成立条件

$k+2=\dfrac{5}{k+2}$ より，$(k+2)^2=5$

これと $1\leq k+2\leq 3$ より，$k+2=\sqrt{5}$

よって，$k=-2+\sqrt{5}$ のとき等号が成立する。

以上より，$z$ は，$k=-2+\sqrt{5}$ のとき，最小値 $2\sqrt{5}$ をとる。

**41**

**(1)**

$x \leq a$ のとき

$$f(x)=x^2+x-a^3+2a=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-a^2+2a-\frac{1}{4} \quad ・・・①$$

$a \leq x$ のとき

$$f(x)=x^2-x-a^3+4a=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-a^2+4a-\frac{1}{4} \quad ・・・②$$

また，①と②は $x=a$ のとき共有点をもつ。すなわち $x=a$ で連続である。　・・・③

$a<-\frac{1}{2}$ のとき

①は $x \leq a$ で単調に減少し，②は $a \leq x \leq \frac{1}{2}$ で単調に減少し，$\frac{1}{2} \leq x$ で単調に増加する。

これと③より，$m(a)=-a^2+4a-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}<a$ のとき

①は $x \leq -\frac{1}{2}$ で単調に減少し，$\frac{1}{2} \leq x \leq a$ で単調に増加する。

②は $a \leq x$ で単調に増加する。

これと③より，$m(a)=-a^2+2a-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき

①は $x \leq -\frac{1}{2}$ で単調に減少し，$\frac{1}{2} \leq x \leq a$ で単調に増加する。

②は $a \leq x \leq \frac{1}{2}$ で単調に減少し，$\frac{1}{2} \leq x$ で単調に増加する。

よって，$-a^2+2a-\frac{1}{4}$ と $-a^2+4a-\frac{1}{4}$ のうち小さい方が最小値となる。

$-a^2+2a-\frac{1}{4}<-a^2+4a-\frac{1}{4}$ となるのは，$2a>0$ より，$a>0$ のときだから，

$-\frac{1}{2} \leq a<0$ のとき

$m(a)=-a^2+4a-\frac{1}{4}$

$a=0$ のとき

$$m(a)=-\frac{1}{4}$$

$0<a\leq\frac{1}{2}$ のとき

$$m(a)=-a^2+2a-\frac{1}{4}$$

以上より，

$a<0$ のとき

$$m(a)=-a^2+4a-\frac{1}{4}$$

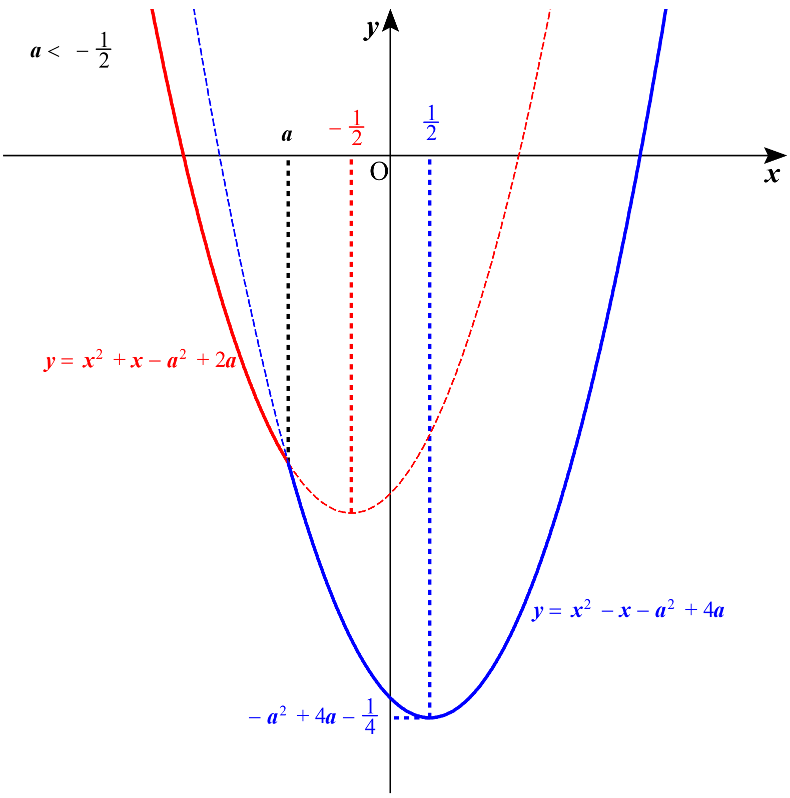
$a=0$ のとき

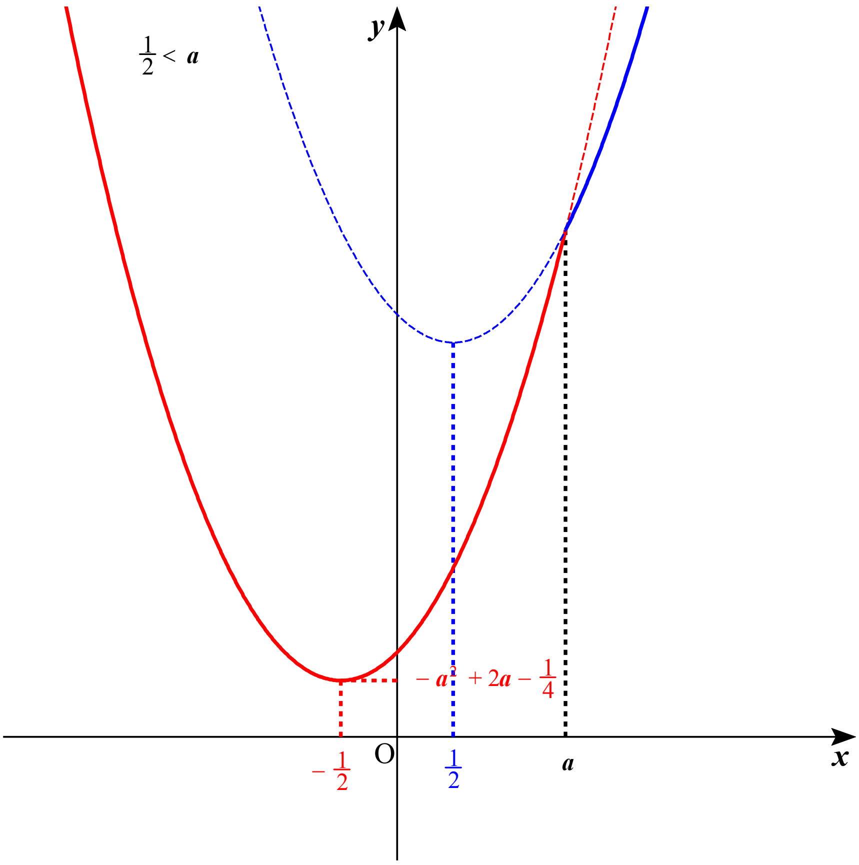
$$m(a)=-\frac{1}{4}$$

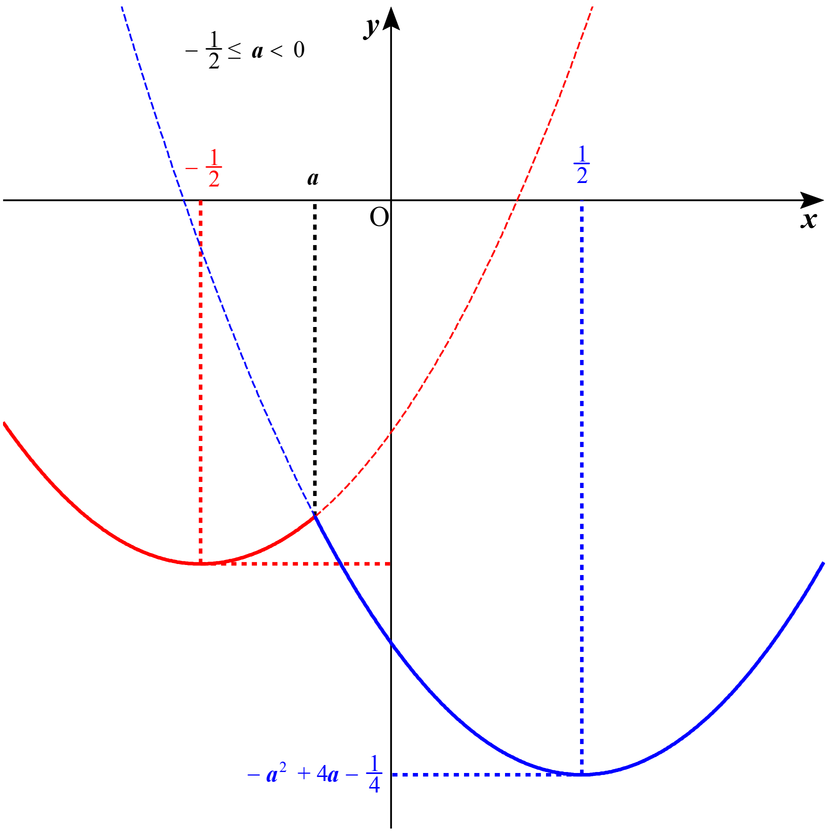
$0<a$ のとき

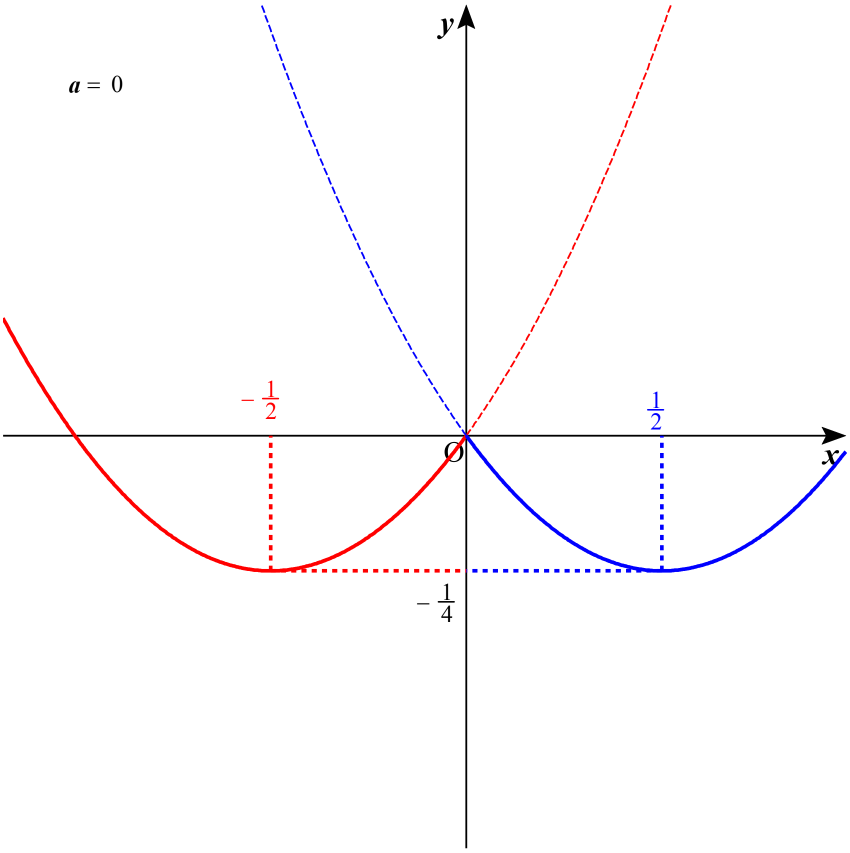
$$m(a)=-a^2+2a-\frac{1}{4}$$

参考図

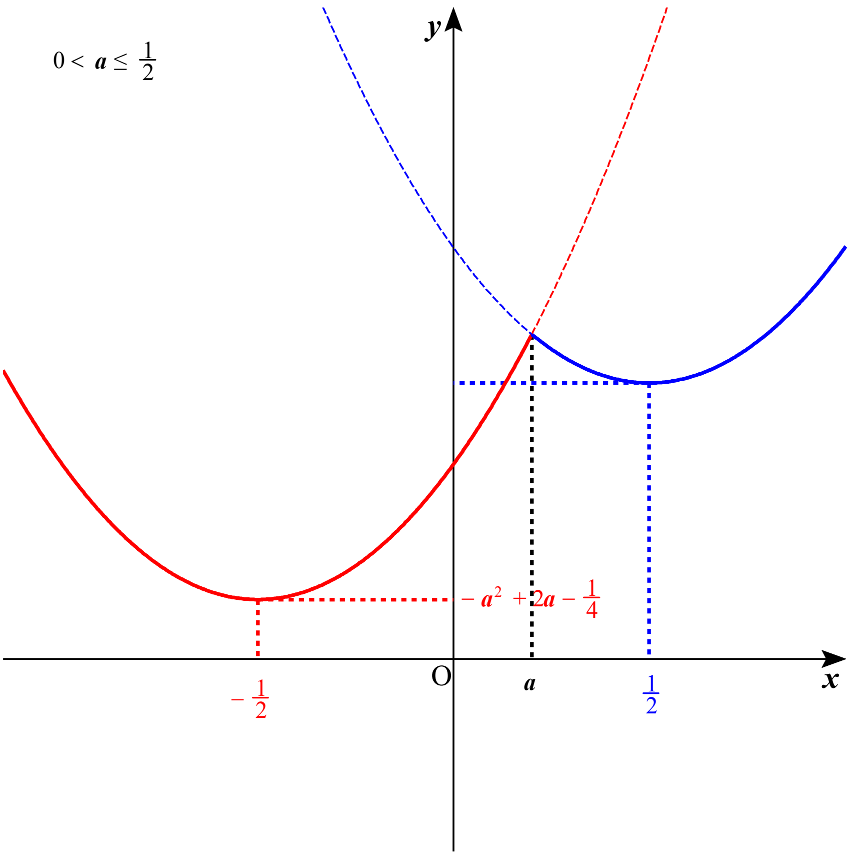



$\frac{1}{2} < a$
$y$
$-a^2 + 2a - \frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$
O
$\frac{1}{2}$
$a$
$x$


$-\frac{1}{2} \leq a < 0$
$y$
$-\frac{1}{2}$
$a$
$\frac{1}{2}$
O
$x$
$-a^2 + 4a - \frac{1}{4}$



a = 0
y
x
O
− 1/2
1/2
− 1/4

0 < a ≤ 1/2
y
x
O
a
− 1/2
1/2
− a² + 2a − 1/4

**(2)**

$m(a)$は$a=0$で連続であり，$m(0)=-\dfrac{1}{4}$

$a<0$のとき

$m(a)=-a^2+4a-\dfrac{1}{4}=-(a-2)^2+\dfrac{15}{4}$より，$m(a)$は単調増加

$0<a$のとき

$m(a)=-a^2+2a-\dfrac{1}{4}=-(a-1)^2+\dfrac{3}{4}$より，

$0<a\leq 1$で単調増加，$1\leq a$で単調減少

よって，$a=1$で最大値$\dfrac{3}{4}$をとる。

参考図